Difusión de la riqueza en una porción territorial rectangular: Un modelo matemático.

FERNANDO ÁVILA CARREÓN *
DORA AGUILASOCHO MONTOYA*
IRMA CRISTINA ESPITIA MORENO*

Resumen

El modelado matemático de variables económicas ha sido aplicado con relativo éxito en los últimos años (Markowich, 2007), en particular para la riqueza (Chukwu, 1998) y haciendo uso de ecuaciones diferenciales (Zhang, 2005). En (Chukwu, 2003) se aplicó para dicha modelación la ecuación diferencial en derivadas parciales. La riqueza u para tales efectos fue definida como la suma de inversión directa en la economía de la república + bienes de capital + el producto de población empleada por salarios + el cociente de la cuantificación de las habilidades empresariales dividido entre la población

Dicha ecuación se utilizó para modelar la difusión de la riqueza en países cuyo territorio podría considerarse en forma aproximada como un rectángulo. Esta es como principio, una buena aproximación.

Palabras clave: Ecuación diferencial, riqueza.

Abstract

The mathematics model of economic variables has been applied by relative success in the last years (Markowich, 2007), especially for the wealth (Chukwu, 1998) and using differential equations (Zhang, 2005). In (Chukwu, 2003) one applied for the above mentioned modeling the differential equation in partial derivatives. The wealth or for such effects there was defined as the sum of direct investment in the economy of the republic + capital goods + the product of population used by wages + the quotient of the quantification of the managerial skills divided between the population

The above mentioned equation was in use for shaping the diffusion of the wealth in countries which territory might be considered in form brought near as a rectangle. This one is at first a good approximation.

Keywords: Differential equation, wealth.

* Profesores de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Introducción

El modelado matemático de variables económicas ha sido aplicado con relativo éxito en los últimos años (Markowich, 2007), en particular para la riqueza (Chukwu, 1998) y haciendo uso de ecuaciones diferenciales (Zhang, 2005). En (Chukwu, 2003) se aplicó para dicha modelación la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha u; 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \qquad (1)$$

sujeta a las condiciones

$$u(0, y, t) = u(a, y, t), \qquad 0 \leq y \leq b, t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t), \qquad 0 \leq x \leq a, t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b,$$

donde la variable $u(x, y, t)$ denota la riqueza del sistema económico como función de x, y (que son las coordenadas en las direcciones oeste-este y sur-norte, respectivamente, del territorio rectangular $[0; a] \times [0; b] \subset \mathbf{R}^2$) y de t (el tiempo transcurrido). La riqueza u para tales efectos fue definida como la suma de inversión directa en la economía de la república + bienes de capital + el producto de población empleada por salarios + el cociente de la cuantificación de las habilidades empresariales dividido entre la población. La constante $\kappa > 0$ se define como el coeficiente colectivo de difusión para la riqueza u mientras que αu es la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior, en este caso directamente proporcional a la riqueza u en cada punto territorial y tiempo con constante de proporcionalidad $\alpha > 0$. Dicha ecuación se utilizó para modelar la difusión de la riqueza en países cuyo territorio podría considerarse en forma aproximada como un rectángulo.

Como se ve, a lo largo de la frontera están impuestas solamente condiciones de Dirichlet. En este trabajo se hace un cálculo análogo considerando en lugar de la ecuación (1) la correspondiente ecuación no homogénea (2) con las condiciones de frontera mixtas allí dadas.

Desarrollo técnico del modelo

Sea $u(x, y, t): [0; a] \times [0; b] \times [0; \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ la riqueza del sistema económico con la porción territorial rectangular, donde x, y son las coordenadas en las direcciones oeste-este y sur-norte respectivamente, mientras que t es el tiempo. La riqueza inicial (en el tiempo $t = 0$) en dicho sistema la denotaremos por $f(x,y)$. La riqueza en las fronteras norte y sur es nula (condición de Dirichlet homogénea) y en las fronteras este y oeste la razón de cambio de la riqueza en dirección perpendicular a las mismas es nula (condición de Neumann homogénea). Supongamos que la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior es de la forma $\alpha u + F(x,y,t)$, $\alpha > 0$. Esto quiere decir que una parte la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior es directamente proporcional a la riqueza u en cada punto territorial y tiempo con constante de proporcionalidad $\alpha > 0$, y otra parte depende solamente de cada punto territorial y tiempo. De esta forma tenemos ahora un modelo con la ecuación no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha u + F(x,y,t); \qquad (2)$$

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad t > 0$$

(la constante $\kappa > 0$ es el coeficiente colectivo de difusión para la riqueza u), sujeta a las condiciones de frontera e inicial

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,y,t) = 0, \qquad 0 \leq y \leq b, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0,t) = 0, \qquad u(x,b,t) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad t > 0,$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b.$$

De acuerdo con el método de separación de variables (DuChateau and Zachmann, 2002), el cual podemos usar debido a las condiciones de frontera homogéneas, se busca la solución $u(x,y,t)$ en forma de la serie de Fourier de funciones propias $\{X_k\}$ del operador diferencial lineal L, definido por medio de la expresión

$$LU = -\kappa \nabla^2 U - \alpha U, \qquad (3)$$

donde el laplaciano ∇^2 en dimensión 2 se define como

$$\nabla^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

El operador L está definido en algún subconjunto del espacio vectorial $L_2[(0;a) \times (0;b)]$ de las funciones $U(x,y)$, $(x,y) \in (0;a) \times (0;b)$ tales que la función $|U(x,y)|^2$ es integrable en $(0;a) \times$

$(0; b)$. Más precisamente, el dominio de definición G_L del operador L está constituido por todas las funciones $U(x,y) \in L_2[(0;a) \times (0;b)]$ que satisfacen las condiciones de frontera

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,y,t) = 0,\ \frac{\partial U}{\partial x}(a,y,t) = 0,\ 0 \leq y \leq b,\ t > 0, \qquad (4)$$

$$U(x,0,t) = 0,\ U(x,b,t) = 0,\ 0 \leq x \leq a,\ t > 0, \qquad (5)$$

y cuyas imágenes $LU \in L_2[(0;a) \times (0;b)]$. El problema de valores propios se plantea como sigue. Hay que encontrar los valores del parámetro Λ (valores propios del operador L) tales que la ecuación

$$LU = \Lambda U \qquad (6)$$

Tiene soluciones no triviales (no nulas) en el dominio G_L. Estas funciones son las funciones propias de L. La ecuación (6) equivale a

$$\nabla^2 U + \frac{\Lambda + \alpha}{\kappa} U = 0$$

Sea $\lambda^2 = \frac{\Lambda+\alpha}{\kappa}$. Entonces la ecuación anterior resulta ser

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U = 0, \qquad (7)$$

Para resolver la ecuación (7) utilizamos la separación de variables. Suponemos una solución no trivial separable en la forma

$$U(x,y) = X(x)Y(y).$$

Las derivadas parciales correspondientes son:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'(x)Y(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = X(x)Y'(y),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)Y(y), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = X(x)Y''(y).$$

Sustituyendo en (7) tenemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda^2 X(x)Y(y) = 0.$$

Dividiendo entre $X(x)Y(y)$ resulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2 = 0$$

y de allí tenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2.$$

Al depender cada lado de esta igualdad de variables distintas, ambos lados deben ser iguales a una constante; elegimos dicha constante como $-\mu^2$, $\mu \in \mathbf{R}$. Entonces las ecuaciones separadas para la ecuación (7) resultan ser

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \tag{8}$$

$$Y''(y) + (\lambda^2 - \mu^2)Y(y) = 0. \tag{9}$$

Las soluciones correspondientes a (8) pueden expresarse como

$$X(x) = A\cos\mu x + B\,\mathrm{sen}\,\mu x.$$

En términos de las variables separadas las condiciones de frontera se convierten en

$$X'(0)Y(y) = X'(a)Y(y) = 0, \qquad 0 \le y \le b, \qquad t > 0.$$

Entonces, para obtener una solución no trivial X de la ecuación (8) se debe tener

$$X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0,$$

por lo que respectivamente tenemos que $B = 0$ y

$$\mathrm{sen}\,\mu a = 0, \qquad A \neq 0.$$

De esto último se da

$$\mu = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Notemos que $\mu = 0$ es también un valor propio. En consecuencia,

$$X_m(x) = A_m \cos\frac{m\pi x}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Del mismo modo, para la solución no trivial Y seleccionamos $\gamma^2 = \lambda^2 - \mu^2$ de modo que de la solución de la ecuación (9) es

$$Y(y) = C\cos\gamma y + D\,\mathrm{sen}\,\gamma y.$$

Con la aplicación de las condiciones homogéneas, encontramos $C = 0$ y

$$\mathrm{sen}\,\gamma b = 0, \qquad D \neq 0.$$

Así, obtenemos

$$\gamma = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y

$$Y_n(y) = D_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Recordando que $\lambda^2 = \mu^2 + \gamma^2$, las soluciones de la ecuación (7) pueden escribirse en la forma

$$U_{mn}(x, y) = E_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{b}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

(con $n = 0$ no hay función propia) para cada uno de los valores propios correspondientes

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2,$$

los cuales para la ecuación (6) se expresan como

$$\Lambda_{mn} = \kappa\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 - \alpha.$$

Podemos renumerar los subíndices dobles mn por el subíndice simple k. De esta manera $\Lambda_{mn} \equiv \Lambda_k$, $U_{mn} \equiv X_k$ y $E_k \equiv E_{mn}$. Así tenemos

$$LX_k = \Lambda_k X_k, \quad X_k \in G_L, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Estas funciones propias de L pueden escogerse ortonormales con

$$E_{0n} = \sqrt{\frac{2}{ab}}, \; E_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}}, \quad m \geq 1, \qquad (10)$$

de modo que

$$\langle X_k, X_l \rangle \equiv \int_0^a \int_0^b X_k(x,y) X_l(x,y)\, dydx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{ab} \displaystyle\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n_l \pi y}{b}\, dydx \;=\; \delta_{kl}, \\ \dfrac{2}{ab} \sqrt{\dfrac{2}{ab}} \displaystyle\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b} \cos \frac{m_l \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_l \pi y}{b}\, dydx \;=\; 0, \\ \dfrac{2}{ab} \sqrt{\dfrac{2}{ab}} \displaystyle\int_0^a \int_0^b \cos \frac{m_k \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n_l \pi y}{b}\, dydx \;=\; 0, \\ \dfrac{4}{ab} \displaystyle\int_0^a \int_0^b \cos \frac{m_k \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b} \cos \frac{m_l \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_l \pi y}{b}\, dydx \;=\; \delta_{kl}, \\ m_k, m_l, n_k, n_l = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

$\{X_k\}$ es un conjunto completo de $L_2[(0;a) \times (0;b)]$ y cada función $u(x,y) \in G_L$ puede representarse en forma de la serie

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, X_k \rangle X_k(x,y).$$

Para $t > 0$ la solución de la ecuación de difusión de la riqueza (2) que cumple las condiciones de frontera e inicial prescritas puede ser escrita como

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x,y)\, T_k(t),$$

$$T_k(t) = \langle u, X_k \rangle \qquad (11)$$

Con el fin de encontrar la ecuación diferencial para las funciones $T_k(t)$, la solución (11) se sustituye en la ecuación (2)

$$\sum_{l=1}^{\infty} X_l(x,y)\, \dot{T}_l(t) = -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) \cdot L X_l(x,y) + F(x,y,t)$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) \cdot \Lambda_l X_l(x,y) + F(x,y,t)$$

Después se toma el producto escalar de esta ecuación por la función propia X_k,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle X_k, X_l \rangle \dot{T}_l(t) = -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) \cdot \Lambda_l \langle X_k, X_l \rangle + \langle X_k, F \rangle$$

y, usando la ortonormalidad de funciones propias, se obtienen las ecuaciones

$$\dot{T}_k(t) + \Lambda_k T_k(t) = f_k(t), \quad f_k(t) \equiv \langle X_k, F \rangle, \;\; k = 1, 2, \ldots. \qquad (12)$$

Debido a la condición inicial de la ecuación (2), de (11) tenemos

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x, y)\, T_k(0),$$

$$T_k(0) = \langle u|_{t=0}, X_k \rangle = \langle f, X_k \rangle. \qquad (13)$$

Para la condición inicial $T_k(0)$ observamos que la solución del problema homogéneo correspondiente a (2) (es decir, con $F(x, y, t) \equiv 0$) tiene la forma

$$u_{\mathrm{H}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x, y)\, T_{\mathrm{H},k}(t),$$

donde

$$T_{\mathrm{H},k}(t) = A_{\mathrm{H},k} e^{-\Lambda_k t}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a (12) (ya que $f_k(t) \equiv 0$ si $F = 0$) para cada Λ_k, siendo cada $A_{\mathrm{H},k}$ una constante arbitraria que determinamos aplicando la condición inicial homogénea

$$u_{\mathrm{H}}(x, y, 0) = \sum_{l=1}^{\infty} X_l(x, y)\, A_{\mathrm{H},l}, \qquad (14)$$

que es la misma que para la ecuación no homogénea ($u_{\mathrm{H}}(x, y, 0) = u(x, y, 0) = f(x, y)$), de donde obtenemos, al tomar el producto escalar de f dada por (14) por X_k y considerando (13),

$$T_k(0) = \langle X_k, f \rangle = A_{\mathrm{H},k}. \qquad (15)$$

Es decir

$$A_{\mathrm{H},k} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b} dydx, \qquad m = 0,$$

y, para $m_k, n_k \geq 1$,

$$A_{\mathrm{H},k} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos \frac{m_k \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b} dydx.$$

La solución del problema de Cauchy para la ecuación (12) con la condición inicial (15) es

$$T_k(t) = A_{\mathrm{H},k} e^{-\Lambda_k t} + \int_0^t e^{-\Lambda_k (t-\tau)} f_k(t) d\tau$$

Sustituyendo esta expresión en la serie (11), se obtiene la solución formal del problema dado por la ecuación de la difusión de la riqueza (2) que cumple las condiciones de frontera e inicial allí dadas.

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x,y) \left[A_{\mathrm{H},k} e^{-\Lambda_k t} + \int_0^t e^{-\Lambda_k (t-\tau)} f_k(t) d\tau \right]$$

Así, la solución de la ecuación de difusión de la riqueza que cumple las condiciones de frontera prescritas puede ser escrita como

$$u(x,y,t) = e^{\alpha t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\kappa \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2 t} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} +$$

$$e^{\alpha t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} e^{-\kappa \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2 t} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

$$\times \int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{\kappa \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2 \tau} f_k(t) d\tau, \tag{16}$$

donde las funciones $f_k(t)$ están dados por (12) para los subíndices m, n que correpondan, los coeficientes E_{mn} están dados por (10), los coeficientes a_{mn} están dados por

$$a_{0n} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dydx \tag{17}$$

y, para $m \geq 1$, por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dydx. \tag{18}$$

Resultados

La expresión de la solución de la ecuación de difusión de la riqueza planteada (2) (Markowich, 2007) está dada por las ecuaciones (16)-(18). Notemos que si

$$\alpha > \kappa\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2, \tag{19}$$

entonces es posible que $u(x,y,t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Conclusiones

Como puede advertirse el crecimiento de la riqueza puede ser no acotado a largo plazo, y en este trabajo se han analizado la participación que en dicho crecimiento tienen el factor exponencial α y la función de entrada $F(x,y,t)$, los cuales juntamente abarcan la generación y transferencia de la riqueza en el territorio rectangular. Para el crecimiento es determinante la condición dada por la desigualdad (19) en relación a α y el último término de la ecuación (18).

Los trabajos previos tal como el de Chukwu (2003), resaltan el hecho de que la riqueza de un país es algo controlable.

Lo cual indica que una situación económica inicial se puede llevar a otra situación económica mejor esto a través de la acción tanto del gobierno, así como de las empresas representativas.

Aún si la economía está deprimida con la disminución del PIB, el alto desempleo, altas tasas de interés y la alta inflación, la situación económica se puede mejorar. Uno puede tener alto PIB, el desempleo bajo o empleo total, tasas bajas de interés.

Por lo que es posible que las naciones de abundante riqueza puedan transferir riqueza a otras naciones. Este flujo de riqueza del exterior puede elevar la riqueza del país en cuestión, cuya riqueza es incipiente. Como resultado de la difusión de riqueza el país que en un principio era pobre

muestra una nueva riqueza, así que puede comprar bienes y servicios del país que inicialmente era rico, aumentando la riqueza de éste aún más.
Esta es una situación de cooperación. No hay nada en la situación descrita, que impida que dos antagonistas cooperen a través del comercio y la ayuda extranjera para elevar su respectiva riqueza.

Ejemplos EU –Alemania después de la segunda guerra mundial.

Este modelo aún se encuentra en desarrollo, sin embargo de acuerdo a las aseveraciones de arriba resulta interesante para cualquier país, poder determinar las variables que de acuerdo a su situación se puedan controlar o al menos cambiar lo suficiente para que los resultados los encaminen al incremento de su riqueza, situación que los hace evidentemente más competitivos.

Referencias

Chukwu, E. N. (2003). Goodness through optimal dynamics of the wealth of nations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 4(5), 653-666.

Chukwu, E.N. (1998). Volterra integrodifferential neutral dynamics for the growth of wealth of nations: a controllability theory. *Indian J. Pure Appl. Math*., 29(7).

DuChateau, P. y Zachmann, D. (2002). *Applied Partial Differential Equations*. Dover.

Markowich, P. A. (2007). Applied partial differential equations*:* a visual approach, Berlin Heidelberg Germany. *Springer-Verlag*.

Zhang, W. (2005). Differential equations, bifurcations, and chaos in economics. Singapore, *World Scientific*.